Vyšetřujeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}$$

v závilosti na $\alpha \in \mathbb{R}$. Označíme

$$A(n) = \arctan \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{a} \quad R(n) = \frac{\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha = 0 \end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1,\ \alpha > 0.$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3}}{(\sqrt[3]{n+4})^2 + \sqrt[3]{(n+4)(n+2)} + (\sqrt[3]{n+2})^2} = \frac{2}{3}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium:

- pro $\alpha \leq 0$ srovnáme s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$, která diverguje.
- pro $\alpha > 0$ srovnáme s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}+\alpha}}$, která konverguje pro $\alpha > \frac{5}{6}$ a jinak diverguje.

Celkově tedy dostáváme, že řada konverguje pro $\alpha > \frac{5}{6}$.